

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και $x \in A$

Θα λέμε ότι **η f είναι περιοδική** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει :

$$\text{i)} \quad x + T \in A, \quad x - T \in A$$

$$\text{και} \quad \text{ii)} \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

2.

Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\text{i)} \quad f(x) = \eta\mu x \quad \text{με} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{με} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \epsilon\phi x \quad \text{με} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{με} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \neq 0\}$$

3.

Μελέτη συνάρτησης

Περιλαμβάνει :

i) πεδίο ορισμού

ii) περιοδικότητα

iii) μονοτονία

iv) ακρότατα

v) σύνολο τιμών

vi) γραφική παράσταση

Η γν. αύξουσα σχεδιάζεται δεξιά και πάνω.

Η γν. φθίνουσα σχεδιάζεται δεξιά και κάτω.

4.

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$

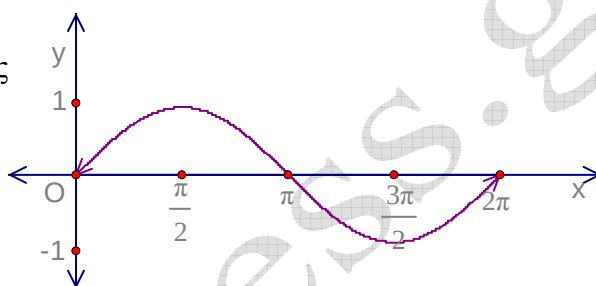
- Η μονοτονία στο διάστημα $[0, 2\pi]$: γν. αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 γν. φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
 γν. αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Πρέπει να θυμόμαστε τις γραφικές παραστάσεις, αφού εύκολα διακρίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα

- Η μέγιστη τιμή είναι το 1 και η ελάχιστη το -1.

Αρα το **σύνολο τιμών** της είναι το διάστημα $[-1, 1]$

- Γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (και επαναλαμβάνεται)



5.

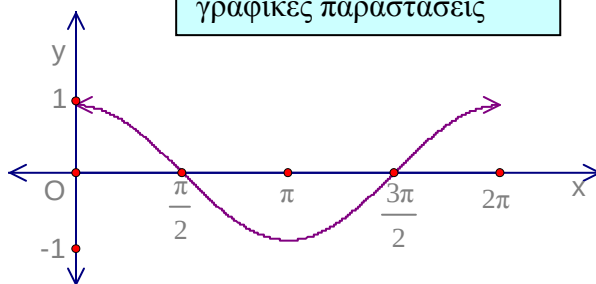
Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$
- Η μονοτονία στο διάστημα $[0, 2\pi]$: γν. φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$
 γν. αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$

Πρέπει να θυμόμαστε τις γραφικές παραστάσεις, αφού εύκολα διακρίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα

- Η μέγιστη τιμή είναι το 1 και η ελάχιστη το -1.
 Αρα το **σύνολο τιμών** είναι το διάστημα $[-1, 1]$
- Γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (και επαναλαμβάνεται)

Πρέπει να θυμόμαστε τις γραφικές παραστάσεις



6.

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq 0\}$

Πρέπει να θυμόμαστε τις γραφικές παραστάσεις

- Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$

- Η μονοτονία :

Στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γν. αύξουσα

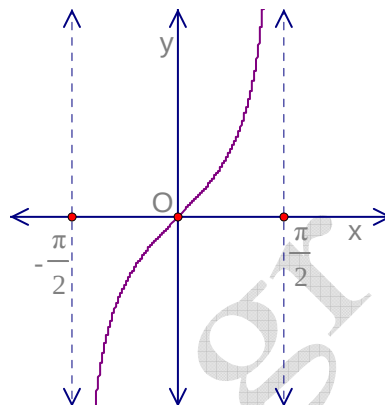
(και επαναλαμβάνεται)

- Το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$

- Γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(και επαναλαμβάνεται)

- Οι ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες

**ΣΧΟΛΙΑ**

1.

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta \mu \omega x$ με $\rho, \omega > 0$

Είναι ημιτονοειδής, περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
έχει μέγιστο ρ , ελάχιστο $-\rho$ και σύνολο τιμών $[-\rho, \rho]$

2.

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \sigma \upsilon \nu \omega x$ με $\rho, \omega > 0$

Είναι συνημιτονοειδής, περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
έχει μέγιστο ρ , ελάχιστο $-\rho$ και σύνολο τιμών $[-\rho, \rho]$

3.

Μετατόπιση της C_f πάνω ή κάτω

Αν $g(x) = f(x) + c$ με $c > 0$, η C_g προκύπτει από τη C_f μετατοπίζοντάς την προς τα πάνω κατά c .

* Όταν $c < 0$, μετατοπίζουμε προς τα κάτω κατά c .

4.

Οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = -f(x)$ λέγονται αντίθετες και οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

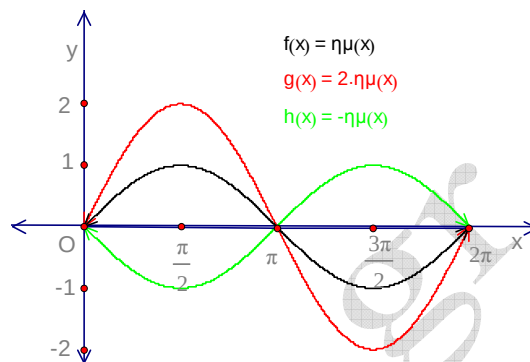
$$f(x) = \eta\mu x \quad , \quad g(x) = 2\eta\mu x \quad , \quad h(x) = -\eta\mu x \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Προτεινόμενη λύση

Η C_f είναι ημιτονοειδής γνωστή από τη θεωρία.

Η C_g είναι ημιτονοειδής της μορφής $g(x) = \rho\eta\mu\omega x$ με $\rho = 2$ και $\omega = 1$, άρα έχει περίοδο $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Η C_h είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$, αφού η h είναι αντίθετη της f . (Σχόλιο 4)



2.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

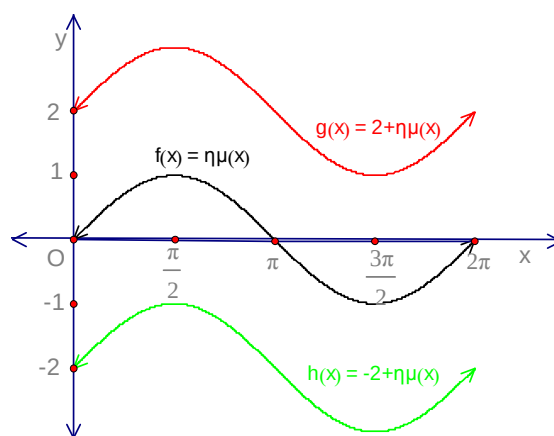
$$f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = 2 + \eta\mu x, \quad h(x) = -2 + \eta\mu x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Προτεινόμενη λύση

Η C_f είναι ημιτονοειδής γνωστή από τη θεωρία.

Η C_g προκύπτει από τη C_f μετατοπίζοντάς την προς τα πάνω κατά 2

Η C_h προκύπτει από τη C_f μετατοπίζοντάς την προς τα κάτω κατά 2



3.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων
 $f(x) = \sin x$, $g(x) = -3\sin x$, $h(x) = 3 + \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Προτεινόμενη λύση

Η C_f είναι συνημιτονοειδής γνωστή από τη θεωρία.

Σχόλιο 4

Η συνάρτηση $g(x) = -3\sin x$ είναι αντίθετη της $q(x) = 3\sin x$.

Άρα η C_g είναι συμμετρική της C_q ως προς τον άξονα $x'x$

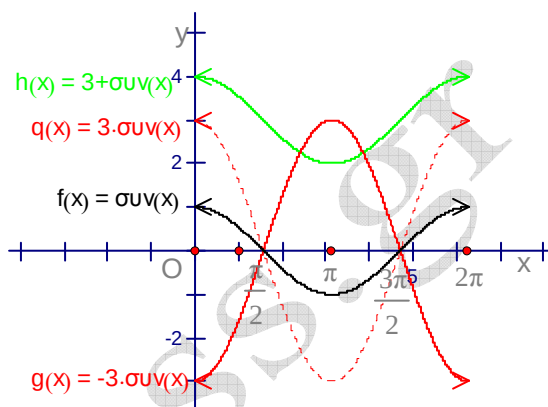
Για να έχουμε τη C_q , παρατηρούμε ότι

η συνάρτηση q είναι της μορφής

$q(x) = \rho \sin \omega x$ με $\rho = 3$ και $\omega = 1$,

άρα έχει περίοδο $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$, μέγιστο 3 και ελάχιστο -3.

Η C_h προκύπτει από τη C_f μετατοπίζοντάς την προς τα πάνω κατά 3.



4.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f(x) = \varepsilon\varphi x \quad , \quad g(x) = 2\varepsilon\varphi x \quad , \quad h(x) = 2 + \varepsilon\varphi x \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Προτεινόμενη λύση

Η C_f είναι εφαπτομενική γνωστή από τη θεωρία.

Για τη C_g :

Θεωρούμε $(OK) = x$ τυχαίο.

Από το K φέρνουμε κάθετη στον άξονα $x'x$,
η οποία τέμνει τη C_f στο σημείο M ,

Τότε είναι $(KM) = \varepsilon\varphi x$.

Προεκτείνουμε το τμήμα KM κατά $MM' = KM$.

Τότε είναι $(KM') = 2(KM) = 2\varepsilon\varphi x$.

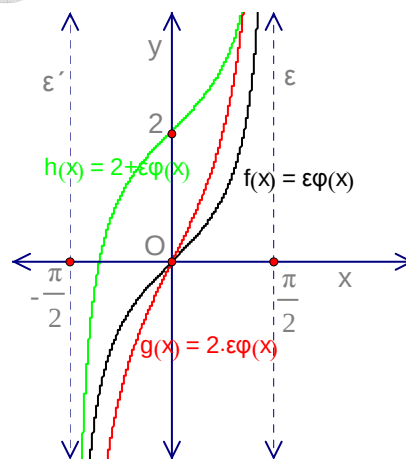
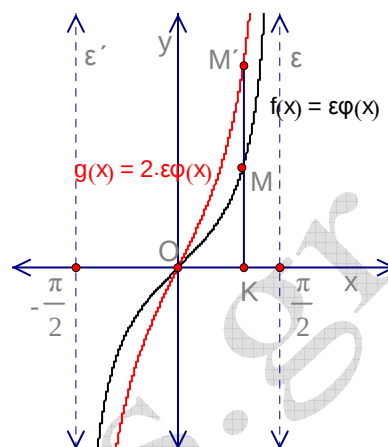
Οπότε το σημείο M' είναι σημείο της C_g

Πολλά τέτοια σημεία συνιστούν τη C_g

Η C_h προκύπτει από τη C_f μετατοπίζοντάς την προς τα πάνω κατά 2.

Οι ευθείες $\varepsilon' : x = -\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon : x = \frac{\pi}{2}$

λέγονται κατακόρυφες ασύμπτωτες της εφαπτομενικής συνάρτησης.



5.

Να απαντήσετε, ποιο είναι το πεδίο ορισμού, ποια η περίοδος, ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

i) $f(x) = \eta\mu 3x$, ii) $g(x) = 2\eta\mu 3x$

Προτεινόμενη λύση

i)

- Πεδίο ορισμού
Πρέπει $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$
- Περίοδος
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$
- Μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη -1, αφού είναι ημιτονοειδής.

ii)

- Πεδίο ορισμού
Πρέπει $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_g = \mathbb{R}$
- Η συνάρτηση g προκύπτει από την f διπλασιάζοντας τις τιμές της f .
Και επειδή η f επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους $\frac{2\pi}{3}$, το ίδιο θα συμβαίνει και για τη g .
Επομένως και η g έχει περίοδο $\frac{2\pi}{3}$
- Με την ίδια λογική, η g έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη -2

6.

Να απαντήσετε, ποιο είναι το πεδίο ορισμού, ποια η περίοδος, ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

i) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$ ii) $g(x) = 2\sin \frac{x}{3}$

Προτεινόμενη λύση

i)

- Πεδίο ορισμού

Πρέπει $\frac{x}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$

- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

- Μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη -1, αφού είναι συνημιτονοειδής.

ii)

- Πεδίο ορισμού

Πρέπει $\frac{x}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_g = \mathbb{R}$

- Η συνάρτηση g προκύπτει από την f διπλασιάζοντας τις τιμές της f .

Και επειδή η f επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 6π , το ίδιο θα συμβαίνει και για τη g .

Επομένως και η g έχει περίοδο 6π

- Με την ίδια λογική, η g έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη -2

7.

Για τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi 3x$

- i) Να αναφέρατε το πεδίο ορισμού
- ii) Να βρείτε μια συγκεκριμένη τιμή του x , η οποία να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της
- iii) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{3}$
- iv) Να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{\pi}{3}$ στο οποίο να ορίζεται η f .

Προτεινόμενη λύση

i)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu 3x \neq 0\}$$

ii)

Θα πρέπει να έχουμε $\sigma\upsilon\nu 3x = 0$.

Μια συγκεκριμένη τιμή για την οποία συμβαίνει $\sigma\upsilon\nu 3x = 0$ είναι η $3x = \frac{\pi}{2}$, αφού

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0, \text{ δηλαδή η } x = \frac{\pi}{6}$$

Πρέπει να θυμηθείς την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

iii)

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\phi\left(3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \varepsilon\phi(3x + \pi) = \varepsilon\phi 3x = f(x) \quad (1)$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\phi\left(3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \varepsilon\phi(3x - \pi) = \varepsilon\phi 3x = f(x) \quad (2)$$

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{3}$

iv)

Αφού η f δεν ορίζεται για $x = \frac{\pi}{6}$ και η περίοδός της είναι $\frac{\pi}{3}$, η επόμενη τιμή του x , για την οποία δεν ορίζεται η f , θα είναι η

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda - 3\sin 4x$, όπου λ πραγματικός αριθμός, της οποίας η ελάχιστη τιμή είναι το -5

i) Να βρείτε το λ και τον τύπο της f

ii) Να βρείτε τον τύπο και την περίοδο της συνάρτησης $g(x) = f\left(\frac{3x}{8}\right)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = -3\sin 4x$ τότε $f(x) = \lambda + \varphi(x)$

Η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι της μορφής $\varphi(x) = \rho \sin \omega x$ με $\rho = -3$ και $\omega = 4$.

Άρα έχει ελάχιστη τιμή $-|\rho| = -|-3| = -3$.

Οπότε η ελάχιστη τιμή της f είναι $\lambda - 3$

Άρα $\lambda - 3 = -5 \Rightarrow \lambda = -2$

Επομένως $f(x) = -2 - 3\sin 4x$

ii)

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } g(x) &= f\left(\frac{3x}{8}\right) = -2 - 3\sin\left(4 \cdot \frac{3x}{8}\right) \\ &= -2 - 3\sin \frac{3x}{2} \\ &= -2 - 3\sin \frac{3}{2}x, \end{aligned}$$

Η C_g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 2 μονάδες της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = -3\sin \frac{3}{2}x$,

άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια περίοδο. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.

9.

Η απόσταση y (σε μέτρα) ενός κινητού από ένα σημείο O δίνεται από την συνάρτηση $y = 4 - 2\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, όπου t ο χρόνος σε λεπτά.

Έστω A το σημείο της μέγιστης απομάκρυνσης από το O και B το σημείο της ελάχιστης απομάκρυνσης από το O .

i) Να βρείτε τις αποστάσεις OA , OB και την περίοδο της κίνησης.

ii) Να βρείτε την απόσταση OG του κινητού από το O όταν $t = 2\text{min}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $f(t) = -2\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, τότε $y = 4 + f(t)$

Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(t) = \rho \sin \omega t$ με $\rho = -2$ και $\omega = \frac{\pi}{6}$

Η μέγιστη τιμή της f είναι $|\rho| = |-2| = 2$,

οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης y είναι $4 + 2 = 6$

Άρα $OA = 6$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι $-|\rho| = -|-2| = -2$

οπότε η ελάχιστη τιμή της y είναι $4 - 2 = 2$

Άρα $OB = 2$

Επειδή η C_y προκύπτει από κατακόρυφη προς τα πάνω μετατόπιση κατά

2 μονάδες της C_f , οι συνάρτησεις $f(t)$ και y θα έχουν την ίδια περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \text{ min}$$

ii)

Για $t = 2$, η απόσταση OG του κινητού είναι :

$$OG = 4 - 2\sin\left(\frac{\pi \cdot 2}{6}\right) = 4 - 2\sin\frac{\pi}{3} = 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 1 = 3 \text{ μέτρα}$$